2024秋微分流形第一次作业解答 2024.10.8

1. Grassmann流形的光滑结构

Recall $\{e_1,\cdots,e_k\},\{f_1,\cdots,f_k\}\subset\mathbb{R}^n$ 决定同一个k维子空间

$\Leftrightarrow \exists P\in GL(k,\mathbb{R})$ 使得

$$\underbrace{(e_1,\cdots,e_k)}_{\text{列向量构成的矩阵},\ \in\mathbb{R}^{n\times k}}=(f_1,\cdots,f_k)P$$

对任意 $a\in Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$，取其一组基，用 A 表示列向量组成的矩阵

WLOG A 的前 $k\times k$ 子矩阵可逆，则:

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Id\\A_2A_1^{-1}\end{pmatrix}A_1$$

可知: $Gr_{\mathbb{R}}(k,n)=M_{\mathbb{R}}(k,n)/\sim$ 第二可数 Hausdorff !

其中 $M_{\mathbb{R}}(k,n):=\mathbb{R}^{n\times k}$ 中满秩的矩阵 $\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{R}^{n\times k}$

$\sim$: $A\sim B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists P\in GL(k,\mathbb{R}),\ A=BP$.

下面给出光滑结构。

记: $\pi: M_{\mathbb{R}}(k,n)\longrightarrow Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$，以及有序指标

$I := (l_1, l_2, \cdots, l_k) \in \mathbb{N}^k$，其中 $1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leqslant n$，记

$L := \{$所有的有序指标 $I\}$，定义：

$$V_I := \left\{ A \in M_{\mathbb{R}}(k,n) : A \text{ 的 } \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} \text{ 子矩阵可逆} \right\} \overset{\text{open}}{\subset} M_{\mathbb{R}}(k,n)$$

$$\left(\simeq GL(k,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{(n-k)\times k} \right)$$

以及 $U_I = \pi(V_I) \overset{\text{open}}{\subset} Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$（因 $\pi^{-1}(U_I) = V_I$）

并记 $P_I = E_{k,l_k} E_{k-1,l_{k-1}} \cdots E_{1,l_1} \in GL(n,\mathbb{R})$，定义：

（E_{ij} 表示交换第 i 行和第 j 行的位置的方阵）

$\varphi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$，

$$b = \pi(B) \longmapsto B_2 B_1^{-1}, \text{ 其中 } B = P_I^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \ B_1 \in GL(k,\mathbb{R})$$

则：① 定义合理，若 $\pi(B) = \pi(\widetilde{B})$，

则必有 $B = \widetilde{B} P$，$P \in GL(k,\mathbb{R})$

$$\text{从而 } P_I B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = P_I \widetilde{B} P = \begin{pmatrix} \widetilde{B_1} P \\ \widetilde{B_2} P \end{pmatrix}, \ B_2 B_1^{-1} = \widetilde{B_2} P (\widetilde{B_1} P)^{-1} = \widetilde{B_2} \widetilde{B_1}^{-1}$$

② φ_I 为连续双射：满射显然，取 $\pi\left(P_I \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ X \end{pmatrix}\right)$ 在 φ_I 下的象为 X.

单射：若 $\varphi_I(b) = \varphi_I(\widetilde{b})$，设 $b = \pi(B)$，$\widetilde{b} = \pi(\widetilde{B})$，$B_2 B_1^{-1} = \widetilde{B_2} \widetilde{B_1}^{-1}$

$$\text{则：} B = P_I^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = P_I^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{B_1} \\ B_2 B_1^{-1} \widetilde{B_1} \end{pmatrix} \widetilde{B_1}^{-1} B_1 = P_I^{-1} \widetilde{B} \underbrace{(\widetilde{B_1}^{-1} B_1)}_{\in GL(k,\mathbb{R})} \text{ 故 } b = \widetilde{b}.$$

φ_I 的连续性由 $\varphi_I\circ\pi$ 连续得到. 有连续逆易见.!

③ $\{(\varphi_I, U_I)\}_{I\in L}$ 光滑相容. (由满射以及拓扑保证)

计算转移映射: 对 $I, J\in L$, $I\neq J$, 有:

$$X\in\mathbb{R}^{(n-k)\times k}\longmapsto \pi\left(P_I\begin{pmatrix}Id\\X\end{pmatrix}\right)\in U_I\cap U_J$$

$$\text{即}: P_I\begin{pmatrix}Id\\X\end{pmatrix}=P_J\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=P_J^{-1}P_I\begin{pmatrix}Id\\X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1&R_2\\R_3&R_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Id\\X\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}R_1+R_2X\\R_3+R_4X\end{pmatrix}$$

$$\varphi_J\circ\varphi_I^{-1}(X)=(R_3+R_4X)(R_1+R_2X)^{-1}$$

是关于 X 的有理函数, 因而光滑.

因此, $Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$ 是 $(n-k)n$ 维的光滑流形. #

<u>Rmk1</u>. 可以利用 $Gr_{\mathbb{R}}(k,n)\simeq O(n)/O(k)\times O(n-k)$ 来给出 $Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$ 的光滑结构.

<u>Rmk2</u> $M_{\mathbb{R}}(k,n)$ 为 $Gr_{\mathbb{R}}(k,n)$ 的主 $GL(k,\mathbb{R})$ 丛.

2、微分同胚的图(graph)是光滑流形.

利用M上的光滑结构即可. $\varphi\in \mathrm{Diff}(M)$.

因M是A_2, T_2的 $\Rightarrow$ graph(φ)是A_2, T_2的.

(利用$M\simeq$ graph(φ)给出graph(φ)的拓扑)

M的坐标卡 $\Rightarrow$ graph(φ)的坐标卡. #

Rmk graph(φ) $\subset M\times M$ 是子流形.

3. 映射环 $T_\varphi(M) := [0,1]\times M/\sim$ 是光滑流形.

记 $\pi: [0,1]\times M \longrightarrow T_\varphi(M)$ 为商映射, 利用M的光滑结构可以给出$T_\varphi(M)$的光滑结构.

主要考虑 $\pi(\{0\}\times M\})$处的坐标卡如何给出.

在$(0,1)\times M$的每点处, 可以直接由M的坐标卡图册$\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}$得到$\pi((0,1)\times M)$每点处的坐标卡图册$\{((\mathrm{Id}\times\varphi_\alpha)\circ\pi^{-1}, \pi((0,1)\times U_\alpha))\} := \{(\tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{U}_\alpha)\}$.

首先: 对$\forall U\subset M$. $\pi^{-1}(\pi(\{0\}\times U)) = (\{0\}\times U)\cup(\{1\}\times\varphi^{-1}(U))$.

定义：$V_\alpha := \left([0,\frac{1}{2})\times U_\alpha\right)\cup\left((\frac{1}{2},1]\times\varphi(U_\alpha)\right)\overset{\text{open}}{\subset}[0,1]\times M$，

则 $\pi^{-1}(\pi(V_\alpha)) = V_\alpha$，故 $\pi(V_\alpha)\overset{\text{open}}{\subset} T_\varphi(M)$.

定义：$\psi_\alpha : \pi(V_\alpha)\to(0,1)\times\varphi_\alpha(U_\alpha)$

其中：

$$\psi_\alpha(\pi(t,p)) = \begin{cases}(t+\frac{1}{2},\ \varphi_\alpha(p)), & 0\le t<\frac{1}{2},\\ (\frac{1}{2},\ \varphi_\alpha(p)), & t=0,\\ (t-\frac{1}{2},\ \varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}(p)), & \frac{1}{2}<t\le 1,\end{cases}$$

则 ψ_α 定义合理，且 $\psi_\alpha\circ\pi$ 连续 $\Rightarrow$ ψ_α 连续.

且 ψ_α 是双射且有连续逆！$(\psi_\alpha^{-1} = \pi\circ(\psi_\alpha\circ\pi)^{-1})$

于是 $\{(\psi_\alpha,\pi(V_\alpha))\}$ 给出了 $\pi(\{0\}\times M)$ 上之外的坐标卡图册

$T_\varphi(M)$ 上的坐标卡图册由 $\{(\psi_\alpha,\pi(V_\alpha))\}\cup\{(\tilde{\varphi}_\alpha,\tilde{U}_\alpha)\}$ 给出. #

Rmk 由此可得 Möbius 带是光滑流形.

4. Heisenberg 群是 Lie 群.

直接将 $H\simeq\mathbb{R}^3$，确定 $\mathbb{R}^3$ 上的乘法运算即可.

① 相乘.

$$\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ & 1 & z_1\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x_2 & y_2\\ & 1 & z_2\\ & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x_1+x_2 & y_1+y_2+x_1z_2\\ & 1 & z_1+z_2\\ & & 1\end{pmatrix}$$

② 取逆.

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\\ & 1 & z\\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & -y+xz\\ & 1 & -z\\ & & 1\end{pmatrix}$$

由此确定 $\mathbb{R}^3$ 上的乘法: $\mu: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$\mu((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=(x_1+x_2,\ y_1+y_2+x_1z_2,\ z_1+z_2)$

以及取逆: $i: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$i((x,y,z))=(-x,\ -y+xz,\ -z)$.

这些映射都是光滑的, 因而得到了 H 的 Lie 群结构. #

5. $SO(n)$ 是紧 Lie 群, $\dim SO(n)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

注意到 $SO(n)$ 是 $O(n)$ 的连通分支, $SO(n)\underset{\text{closed}}{\overset{\text{open}}{\subset}}O(n)$

$SO(n)$ 紧由 $O(n)$ 紧保证, 维数由 $SO(n)\overset{\text{open}}{\subset}O(n)$ 得到.

Lie 群结构由 $O(n)$ Lie 群结构得到. #

6. $SO(3) \overset{\text{diff}}{\simeq} \mathbb{R}P^3$.

Recall 任意 $P \in O(3)$ 可以表示为绕某一轴的旋转.

特别地, $P \in SO(3)$ 可以表示为:

$v \in S^2$ 为 P 转轴的单位方向向量, 则:

P 表示按 v 的右手定向(逆时针)旋转 $\theta \in [0, 2\pi]$ 角

$\Longleftrightarrow$ P 表示按 $-v$ 的右手定向(顺时针)旋转 $2\pi - \theta$ 角

从而 $SO(3) \simeq S^2 \times [0, 2\pi] / \sim$; 其中 $(v, \theta) \sim (-v, 2\pi - \theta)$

定义: $\varphi: SO(3) \to \mathbb{R}P^3$, $\underbrace{[(v,\theta)]}_{\text{上面给到的等价类}} \longmapsto \underbrace{[(v\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})]}_{\mathbb{R}P^3 \simeq S^3/_{-x \sim x} \text{ 等价类}}$.

$(v, \theta) \sim (-v, 2\pi - \theta) \Longleftrightarrow (v\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}) \sim (-v\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2})$

可以验证, φ 是连续双射, 且有连续逆;

且 φ 与 $SO(3)$ 和 $\mathbb{R}P^3$ 光滑相容, 故 φ 为微分同胚.

#

Rmk 有同学利用 Lie 群作用证的也是可以的.

$SO(3) \curvearrowright \mathbb{R}P^3$ 是自由的, 且是 transitive.

7. Segre映射的光滑性.

这是易于验证的: Segre映射在局部坐标下是多项式.

下面只验证一种情况: $[(w_0, w_1)], [(z_0, z_1)]$, $w_0, z_0 \neq 0$

其它情况类似.

<u>Recall</u> $\mathbb{C}P^n$ 的光滑结构.

$$\text{若 } z_0 \neq 0, \text{ 则 } [(z_0, z_1, \cdots, z_n)] \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \cdots, \frac{z_n}{z_0}\right)$$

$$(w_1, \cdots, w_n) \longmapsto [(1, w_1, \cdots, w_n)]$$

$$S\Big([(w_0, w_1)], [(z_0, z_1)]\Big) = [(w_0 z_0, w_0 z_1, w_1 z_0, w_1 z_1)]$$

在局部坐标下,

$$\tilde{S}(w, z) = S([(1, w)], [(1, z)]) \text{ 在局部坐标下的表示}$$

$$= [(1, w, z, wz)] \text{ 在局部坐标下的表示}$$

$$= (w, z, wz)$$

这是光滑的. #

8. $E(n)$ 到 $GL(n+1, \mathbb{R})$ 的表示.

定义: $\varphi: E(n) \to GL(n+1, \mathbb{R})$, $\varphi(v, A) = \begin{pmatrix} A & v \\ & 1 \end{pmatrix}$.

① φ 是同态.

$$\varphi((v,A)\cdot(w,B)) = \varphi(v+Aw,\ AB) = \begin{pmatrix} AB & v+Aw \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & v \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & w \\ & 1 \end{pmatrix} = \varphi(v,A)\,\varphi(w,B)$$

② φ 光滑. $E(n)$ 上的光滑结构等同于 $\mathbb{R}^n \times O(n)$ 上的光滑结构

在 $\mathbb{R}^n \times O(n)$ 和 $GL(n+1,\mathbb{R})$ 的光滑结构下, 易知 φ 为光滑的.

因而 φ 是 Lie 群同态 #

9. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 是 homogenous 的.

Rmk. Lie 群作用不一定需要是紧 Lie 群.

这是标准的复分析理论的结论: $\mathbb{H}$ 上的 $SL(2,\mathbb{R})$ 作用.

$$SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},$$

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}}_{\text{分式线性变换}}$$

check 左边的映射象集的确是 $\mathbb{H}$. #

Rmk 课上的定义没有要求群作用自由. $PSL(2,\mathbb{R})$ 也可以.

10. $M \overset{\text{diff}}{\simeq} N \Rightarrow \dim M = \dim N$.

设 $\left.\begin{array}{l} f: M \to N \\ g: N \to M \end{array}\right\}$ 微分同胚，$f^{-1} = g$.

则：$df_p: T_pM \to T_{f(p)}N := T_qN$

$dg_q: T_qN \to T_pM$

则：$g \circ f = Id_M \Rightarrow (dg_q) \circ (df_p) = Id_{T_pM}$

$f \circ g = Id_N \Rightarrow (df_p) \circ (dg_q) = Id_{T_qN}$

从而 T_pM 与 T_qN 是线性同构的，于是

$$\dim T_pM = \dim M = \dim T_qN = \dim N. \qquad \#$$

Rmk. 若 $M \simeq N$ 拓扑同胚，则上面结果仍然成立.

(需要用到代数拓扑).